Φυλλάδιο #4

Άσκηση 5

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Πρέπει να είναι διαγωνίσιμος. $\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \det\begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{bmatrix} = x^2 - 4x + 3 - 8 = (x-5)(x+1)$ Άρα A διαγωνίσιμος γιατί $\chi_A(x)$ γράφεται με γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων και ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = -1$ με πολ/τητα 1. Υπολογίζουμε $V_A(5)$ = πράξεις και βρίσκουμε βάση $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Υπολογίζουμε $V_A(-1)$ και βρίσκουμε βάση $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ Θέτουμε $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε τον P^{-1} και βρίσκουμε $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ Από θεωρία

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{\text{θεωρία}}{\Rightarrow} A = P\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P \overset{-\prime\prime-}{\Rightarrow} e^A = P e^{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^{1} \end{bmatrix}P^{-1}$$

που μετά τις πράξεις βρίσκουμε.

Άσκηση 2

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τ.ω $A^2 + I_2 = \mathbb{O}_{2\times 2}$ (i) $m_A(x) = ;$ (ii) ν.δ.ο δεν διαγωνοποιείται

Έστω $m_A(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του A. Η υπόθεση μας λέει ότι $P(A) = \mathbb{O}_{2\times 2}$ όπου $p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$. Από θεωρία (Πρόταση) έπεται ότι $m_A(x)$ διαιρεί το $p(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$. Από θεωρία αφού $p(x)$ ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ και $m_A(x)$ μονικό

Έχουμε $m_A(x) = x^2+1$ Άρα δεν είναι διαγωνίσιμος ο A γιατί ξέρουμε από θεωρία A διαγωνίσιμος $\Longleftrightarrow$ $m_A(x)$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων. (Παρατήρηση: δεν έχει να κάνει ότι είναι 2×2, μπορούσε να είναι και 100×100, αλλά δεν θα μπορούσε να είναι 1×1)

Άσκηση 3

$A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ και $A^2 = I$. Θέτουμε $p(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Έχουμε $p(A) = \mathbb{O}_{3\times3}$ από υπόθεση. Από θεωρία $m_A(x)$ μονικό που διαιρεί το $p(x)$. Άρα 3 πιθανότητες για το $m_A(x)$: $m_A(x) = x-1$ ή $m_A(x) = x+1$ ή $m_A(x) = \chi_A(x) = (x-1)(x+1)$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε A διαγωνίσιμος από το γεγονός ότι το $m_A(x)$ και στις 3 περιπτώσεις γράφεται ως γινόμενο πρωτοβαθμίων

(Για $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ έχουμε $A^2 = I_3$. Άρα A όχι αναγκαστικά διαγώνιος)

Αν $m_A(x) = (x-1) \Rightarrow \chi_A(x) = (x-1)^3$

Αν $m_A(x) = (x+1) \Rightarrow \chi_A(x) = -(x+1)^3$

Αν $m_A(x) = (x-1)(x+1) \Rightarrow \chi_A(x) = -(x-1)^2(x+1)$ π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ή $\chi_A(x) = -(x-1)(x+1)^2$ π.χ. για $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Άσκηση 4

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $m > n$. Υπόθεση $A^m = 0$ ν.δ.ο. $A^n = 0$

(π.χ. $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $A^{2015} = \mathbb{O}_{3\times3} \Rightarrow A^3 = \mathbb{O}_{3\times3}$)

Λύση: Έστω $p(x) = x^m$. Έχουμε $p(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$. Άρα από θεωρία $m_A(x)$ διαιρεί $p(x)$ (αφού $\deg m_A(x) \le n$) ότι υπάρχει $t \in \mathbb{Z}$ με $1 \le t \le n$ ώστε $m_A(x) = x^t$. Άρα $A^t = 0 \overset{\text{αφού}}{\underset{n \ge t}{\Longrightarrow}} A^n = A^{n-t}A^t = \mathbb{O}_{n\times n}$

(παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A \neq \mathbb{O}_{2\times2}$, $A^2 = \mathbb{O}_{2\times2}$)

Άσκηση 6

$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $\langle (a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2$

α) συμμετρία

$\langle (a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle = 5b_1a_1 - 2b_1a_2 - 2b_2a_1 + b_2b_2 = \langle (b_1,b_2),(a_1,a_2)\rangle$

διγραμμικότητα (λόγω συμμετρίας αρκεί να δείξουμε γραμμικότητα μόνο ως προς την πρώτη θέση. Έχουμε $\langle (a_1,a_2)+(a_1',a_2'),(b_1,b_2)\rangle = \langle (a_1+a_1', a_2+a_2'),(b_1,b_2)\rangle =$

$= 5(a_1+a_1')b_1 - 2(a_1+a_1')b_2 - 2(a_2+a_2')b_2 + (a_2+a_2')b_2 = (5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2)$

$+ (5a_1'b_1 - 2a_1'b_2 - 2a_2'b_1 + a_2'b_2) = \langle (a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle + \langle (a_1',a_2'),(b_1,b_2)\rangle$ Ομοίως

$\langle \lambda(a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle = \langle (\lambda a_1, \lambda a_2),(b_1,b_2)\rangle = 5\lambda a_1b_1 - 2\lambda a_1b_2 - 2\lambda a_2b_1 + \lambda a_2b_2 =$

$\lambda(5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2) = \lambda\langle (a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle$

Θετικά ορισμένη $\langle (a_1,a_2),(a_1,a_2)\rangle = 5a_1^2 - 2a_1a_2 - 2a_2a_1 + a_2^2 = 5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2$

Θέλουμε ν.δ.ο $5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2 > 0$. $5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2 = a_1^2 + 4a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2$

$= a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2$ Άρα $\langle (a_1,a_2),(a_1,a_2)\rangle > 0_{\mathbb{R}}$ $\forall (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$

Έχουμε $\langle (a_1,a_2),(a_1,a_2)\rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2 = 0_{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0_{\mathbb{R}} \\ 2a_1 - a_2 = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$

Άρα $\langle \, , \, \rangle$ θετικά ορισμένη

β) $\|(1,0)\| = \sqrt{\langle (1,0),(1,0)\rangle} = \sqrt{5}$

$\|(0,1)\| = \sqrt{\langle (0,1),(0,1)\rangle} = \sqrt{1} = 1$

$\|(1,3)\| = \sqrt{\langle (1,3),(1,3)\rangle} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\|(-1,2)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$

Άσκηση 7

$r_0 \; r_1 \; r_2 \; \dots \; r_n$ Συμμετρική η $\langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{n} f(r_i)g(r_i) = \sum_{i=0}^{n} g(r_i)f(r_i) = \langle g,f\rangle$

γραμμικότητα

$\langle f+f',g\rangle = \sum_{i=0}^{n} [(f+h)(r_i)](g(r_i)) = \sum_{i=0}^{n} (f(r_i)+h(r_i))(g(r_i)) = \sum_{i=0}^{n} (f(r_i)+g(r_i)+h(r_i)g(r_i))$

$= \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle$. Ομοίως και οι υπόλοιποι υπολογισμοί για την διγραμμικότητα

$\langle f,f\rangle = \sum_{i=0}^{n} (f(r_i))((f(r_i))) = \sum_{i=0}^{n} f^2(r_i)$ Άρα $\langle f,f\rangle \geq 0$ για κάθε $f \in \mathbb{R}_n[x]$

Επίσης, $\langle f,f\rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} f^2(r_i) = 0$ Άρα $f(r_i) = 0$ για $i = 0,1,\dots,n$

Άρα η $f(x)$ έχει τουλάχιστον $n+1$ διακεκριμένες ρίζες (και r_i) στο $\mathbb{R}$ γιατί από υπόθεση $r_i \neq r_j$ για $i \neq j$. Από θεωρία ξέρουμε ότι αν $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ είναι μη μηδενικό έχει βαθμό n έχει το πολύ n διακεκριμένες ρίζες στο $\mathbb{R}$. Σαν συμπέρασμα $\langle f,f\rangle = 0_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow f$ μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}_n[x]$ Άρα $\langle \, , \, \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}_n[x]$

Άσκηση 1

$f(x)=(-1)^n(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \dots +a_1x+a_0)\in \mathbb{K}[x]$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

επαλήθευση για $n=1$. $A=[-a_0]$ $\chi_A(x)=-x+a_0$ (ισχύει

για $n=2$ $\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$ $\chi_A(x)=-a_0$ ισχύει)

Υποθέτουμε για $n\geq 3$ και το αποτέλεσμα ισχύει για $(n-1)\times(n-1)$ πίνακες

Τότε $\det(A-xI_n)=\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix}$ ανάπτυξη 1η γραμμή

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & -x & & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & & -x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1}-x \end{vmatrix} + (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & -x & & 0 \\ & 1 & -x & \\ 0 & & \ddots & -x \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

επαγωγική υπόθεση
$= (-x)(-1)^{n-1}(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\dots+a_1)+(-1)^n a_0 =$

$(-1)f(x)$. Άρα από Αρχή Μαθ. Επαγ. το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε n.